

Soal Latihan dan Pembahasan Dimensi Tiga

Di susun Oleh :

Yuyun Somantri¹

<http://bimbinganbelajar.net/>

Di dukung oleh :

Portal edukasi Gratis Indonesia
Open Knowledge and Education

<http://oke.or.id>



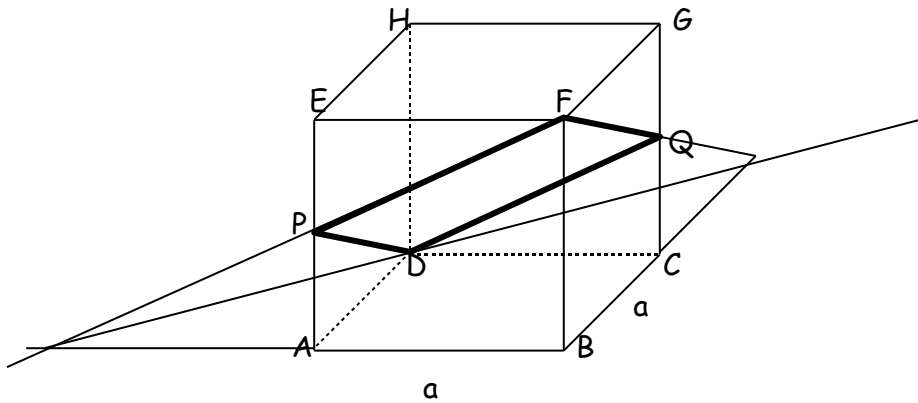
Tutorial ini diperbolehkan untuk di copy, di sebarluaskan, di print dan diperbaiki dengan tetap menyertakan nama penulis, tanpa ada tujuan komersial

¹ Lahir di Bandung tahun 1956, Lulus dari SMK Kimia melanjutkan studinya ke UPI (IKIP Bandung), lalu meneruskan studinya lagi bidang matematika dan dari tahun 1984 sampai saat ini mengajar matematika di SMA Negeri 3 Tasikmalaya

Dimensi Tiga

1. Diketahui kubus $ABCD.EFGH$ dengan rusuk a . Melalui diagonal DF dan titik tengah rusuk AE dibuat bidang datar. Tentukan luas bagian bidang di dalam kubus !

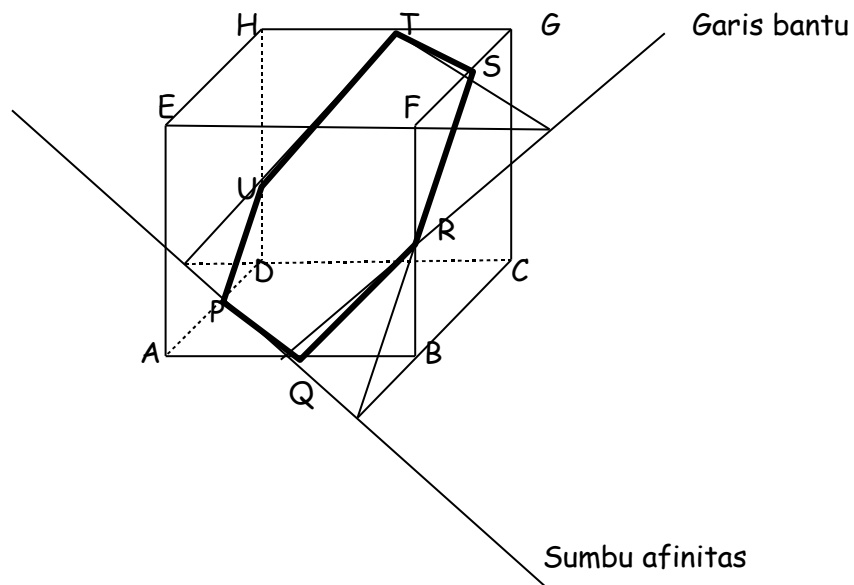
Jawab :



$$L_{PQDF} = \frac{1}{2} \cdot PQ \cdot DF = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{3} = \frac{1}{2} a^2 \sqrt{6}$$

2. Kubus $ABCD.EFGH$ berusuk a cm. Titik P , Q dan R adalah titik-titik tengah dari AD , AB dan BF . Berapa apakah penampang bidang PQR !

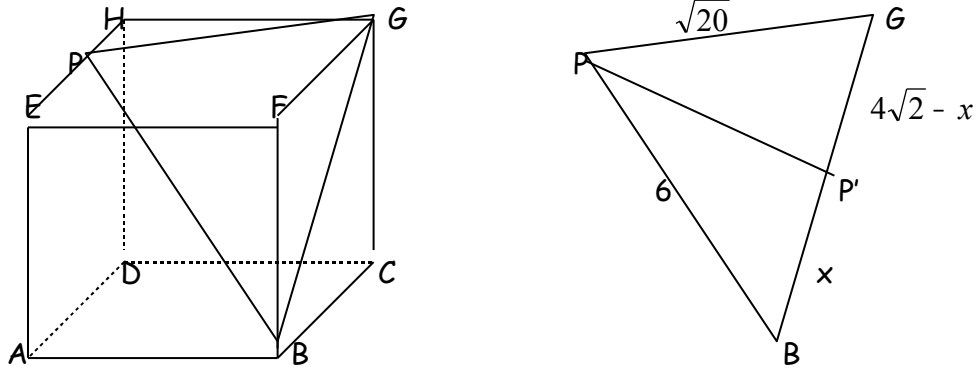
Jawab :



Jadi berupa segienam beraturan $PQR.STU$

3. Kubus $ABCD.EFGH$ panjang rusuknya 4 cm. Titik P tengah-tengah EH . Tentukan jarak titik P ke garis BG !

Jawab :



P' adalah proyeksi titik P pada garis BG .

$$PG = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}$$

$$BG = 4\sqrt{2}$$

$$BP = \sqrt{(4\sqrt{2})^2 + 2^2} = 6$$

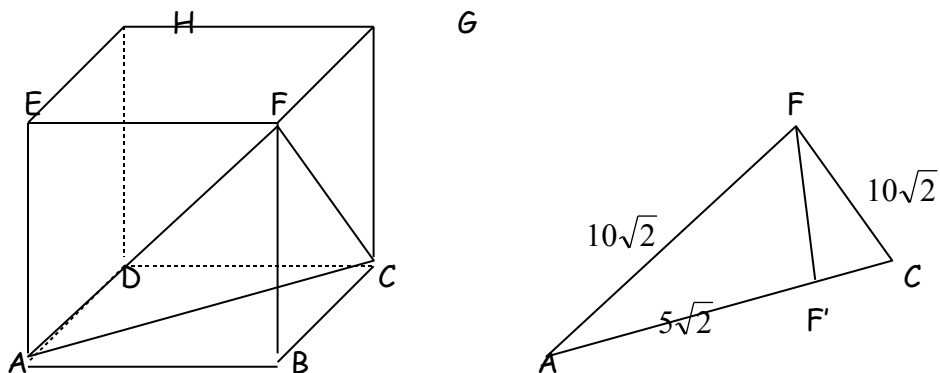
$$(PP')^2 = (PP')^2$$

$$\sqrt{20}^2 - (4\sqrt{2} - x)^2 = 6^2 - x^2 \Leftrightarrow x = 3\sqrt{2}$$

$$(PP')^2 = 36 - x^2 = 36 - (3\sqrt{2})^2 = 18 \Rightarrow PP' = 3\sqrt{2}$$

4. Diketahui kubus $ABCD.EFGH$ dengan rusuk-rusuknya 10 cm. Tentukan jarak titik F ke garis AC !

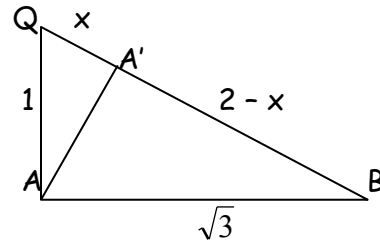
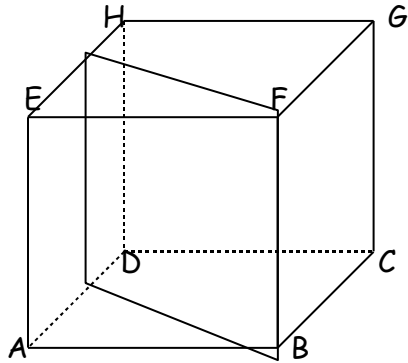
Jawab :



$$FF' = \sqrt{(10\sqrt{2})^2 - (5\sqrt{2})^2} = 5\sqrt{6}$$

5. Panjang setiap rusuk kubus $ABCD.EFGH$ ialah $\sqrt{3}$, sedangkan titik Q pada AD dan $AQ = 1$. Tentukan jarak A ke bidang QBF !

Jawab :



$$BQ = \sqrt{1+3} = 2$$

$$(AA')^2 = (AA')^2$$

$$1 - x^2 = 3 - (2-x)^2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$AA' = \sqrt{1 - x^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

Cara lain :

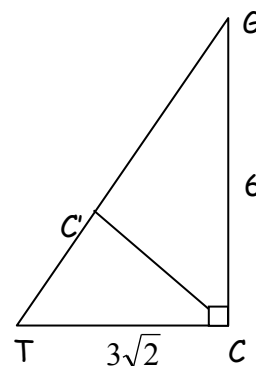
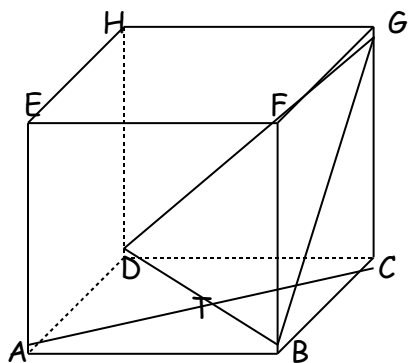
$$L_{\Delta QAB} = \frac{1}{2} AB \cdot AQ = \frac{1}{2} BQ \cdot AA'$$

$$AB \cdot AQ = BQ \cdot AA'$$

$$\sqrt{3} \cdot 1 = 2 \cdot AA' \Leftrightarrow AA' = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

6. Pada kubus $ABCD.EFGH$, tentukan jarak antara titik C dengan bidang BDG yang panjang rusuknya 6 cm !

Jawab :

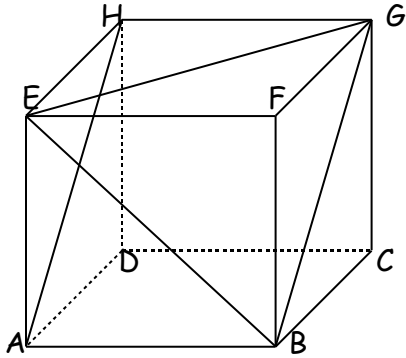


$$GT = \sqrt{36 + 18} = 3\sqrt{6}$$

$$CT \cdot CG = GT \cdot CC' \Leftrightarrow CC' = \frac{CT \cdot CG}{GT} = \frac{3\sqrt{2} \cdot 6}{3\sqrt{6}} = 2\sqrt{3}$$

7. Jika BE dan AH masing-masing diagonal bidang sisi $ABFE$ dan $ADHE$ pada kubus $ABCD.EFGH$, maka tentukan besar sudut antara BE dan AH !

Jawab :

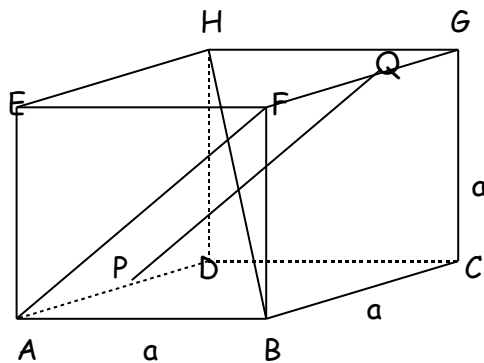


BG sejajar AH .

$$\angle (BE, AH) = \angle (BE, BG) = 60^\circ$$

8. Pada kubus $ABCD.EFGH$, tentukan sudut antara garis AF dan BH !

Jawab :



PQ sejajar AF

$$\angle (BH, AF) = \angle (BH, PQ) = x$$

$$PR = \frac{1}{2}PQ = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$$

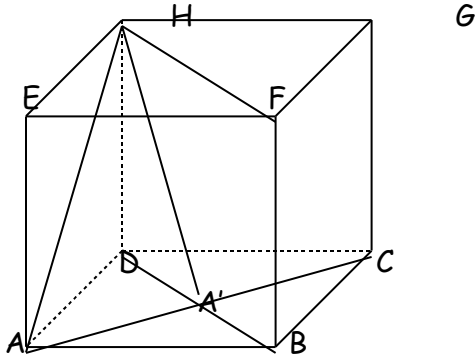
$$BR = \frac{1}{2}BH = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$$

$$BP = \sqrt{a^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2} = \frac{1}{2}a\sqrt{5}$$

$$\cos x = \frac{(BR)^2 + (PR)^2 - (BP)^2}{2 \cdot BR \cdot PR} = \frac{\frac{3}{4}a^2 + \frac{2}{4}a^2 - \frac{5}{4}a^2}{2 \cdot \frac{1}{2}a\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}a\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow x = 90^\circ$$

9. Pada kubus $ABCD.EFGH$, tentukan sudut antara garis AH dan bidang $BFHD$!

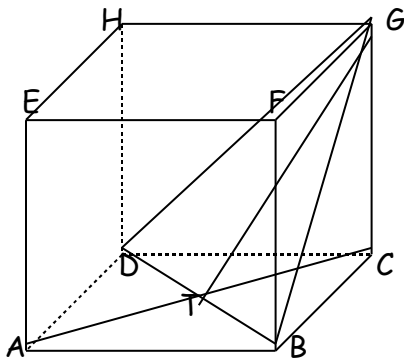
Jawab :



$$\begin{aligned} \angle (AH, BFHD) &= \angle (AH, A'H) = \alpha \\ \sin \alpha &= \frac{AA'}{AH} = \frac{\frac{1}{2}a\sqrt{2}}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30^\circ \end{aligned}$$

10. Pada kubus $ABCD.EFGH$, tentukan tangen sudut antara CG dan bidang BDG !

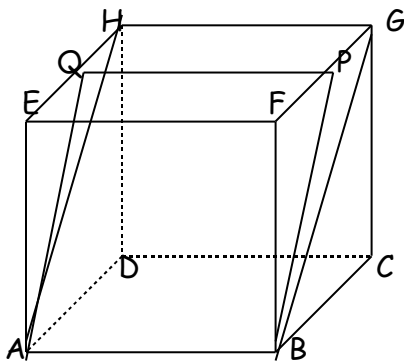
Jawab :



$$\begin{aligned} \angle (CG, BDG) &= \angle (CG, GT) = \theta \\ \tan \theta &= \frac{CT}{CG} = \frac{\frac{1}{2}a\sqrt{2}}{a} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{aligned}$$

11. Pada kubus $ABCD.EFGH$. P adalah titik tengah FG dan Q adalah titik tengah EH . Jika θ adalah sudut antara bidang $ABGH$ dan $ABPQ$, maka tentukan $\tan \theta$!

Jawab :



$$\left. \begin{array}{l} PB \perp AB \\ GB \perp AB \end{array} \right\} \Rightarrow \angle (ABPQ, ABGH) = \angle (PB, GB) = \theta$$

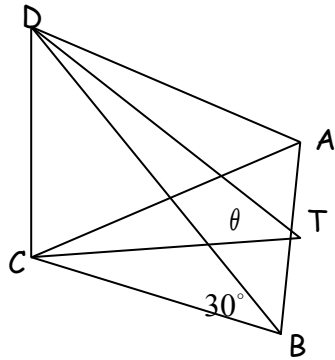
$$AB = a \Rightarrow BP = \frac{a}{2}\sqrt{5}, BG = a\sqrt{2}$$

$$\cos \theta = \frac{(PB)^2 + (BG)^2 - (PG)^2}{2 \cdot PB \cdot BG} = \frac{\frac{5}{4}a^2 + 2a^2 - \frac{1}{4}a^2}{2 \cdot \frac{a}{2}\sqrt{5} \cdot a\sqrt{2}} = \frac{3a^2}{a^2\sqrt{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\tan \theta = \frac{1}{3}$$

12. Pada bangun $D.ABC$ diketahui bahwa bidang ABC sama sisi. DC tegak lurus ABC . Panjang $DC = 1$ dan sudut $DBC = 30^\circ$. Bila θ menyatakan sudut antara bidang DAB dengan CAB maka tentukan $\tan \theta$!

Jawab :



$$\sin 30^\circ = \frac{1}{BD} \Leftrightarrow BD = 2$$

$$BC = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$$

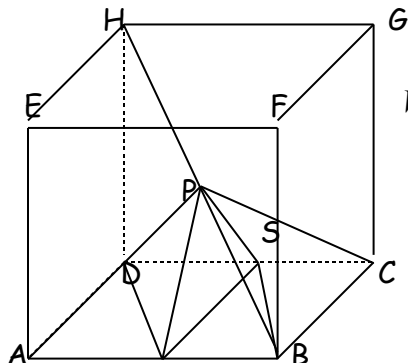
$$BT = \frac{1}{2}BA = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$CT = \sqrt{(\sqrt{3})^2 - \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2} = \frac{3}{2}$$

$$\tan \theta = \frac{CD}{CT} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

13. Pada kubus $ABCD.EFGH$, titik S adalah titik tengah sisi CD dan P adalah titik tengah diagonal BH . Tentukan perbandingan antara volume limas $P.BCS$ dan volume kubus $ABCD.EFGH$!

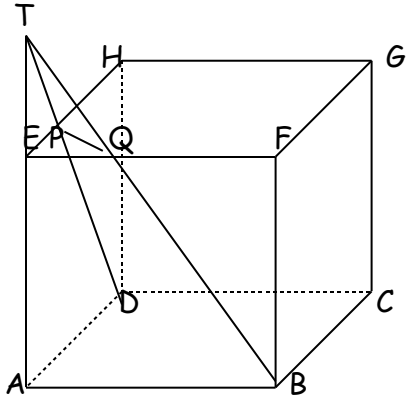
Jawab :



$$V_{P.BCS} : V_{ABCD.EFGH} = 1 : 24$$

14. Diketahui kubus $ABCD.EFGH$ dengan rusuk a . T adalah suatu titik pada perpanjangan AE sehingga $TE = \frac{1}{2} a$. Jika bidang TBD memotong bidang atas $EFGH$ sepanjang PQ , maka tentukan panjang PQ !

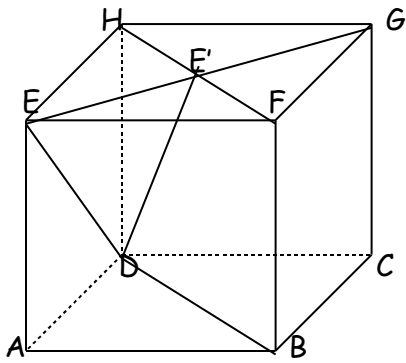
Jawab :



$$\frac{TE}{EA} = \frac{PQ}{BD} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}a}{\frac{3}{2}a} = \frac{PQ}{a\sqrt{2}} \Leftrightarrow PQ = \frac{1}{3}a\sqrt{2}$$

15. Diketahui kubus $ABCD.EFGH$ dengan rusuk 8 cm. Tentukan panjang proyeksi DE pada bidang $BDHF$!

Jawab :

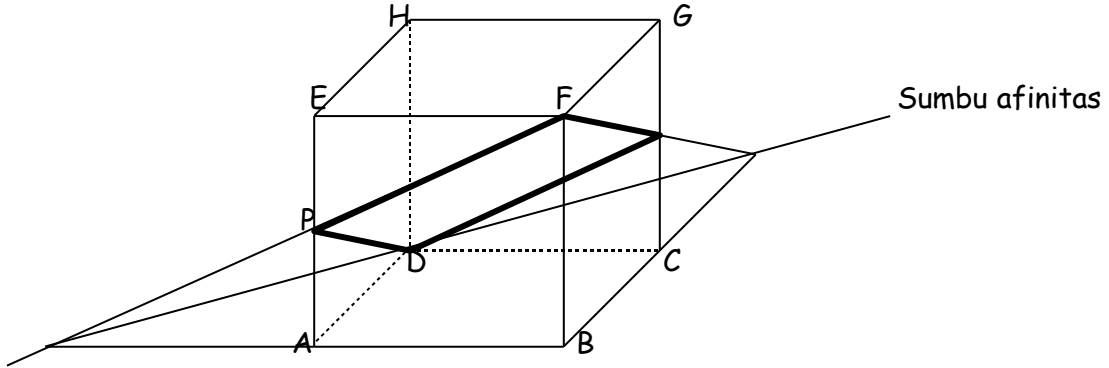


Proyeksi DE pada $BDHF$ adalah DE' .

$$DE' = \sqrt{8^2 + (4\sqrt{2})^2} = 4\sqrt{6} \text{ cm.}$$

16. Diketahui kubus $ABCD.EFGH$. Titik P adalah titik tengah rusuk AE . Tentukan bentuk irisan bidang melalui titik-titik P, D dan F dengan kubus !

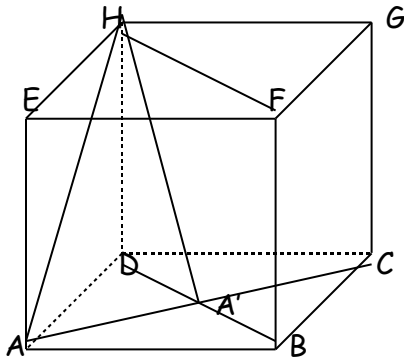
Jawab :



Jadi berupa belah ketupat.

17. Pada kubus $ABCD.EFGH$, tentukan panjang proyeksi AH pada bidang $BDHF$!

Jawab :

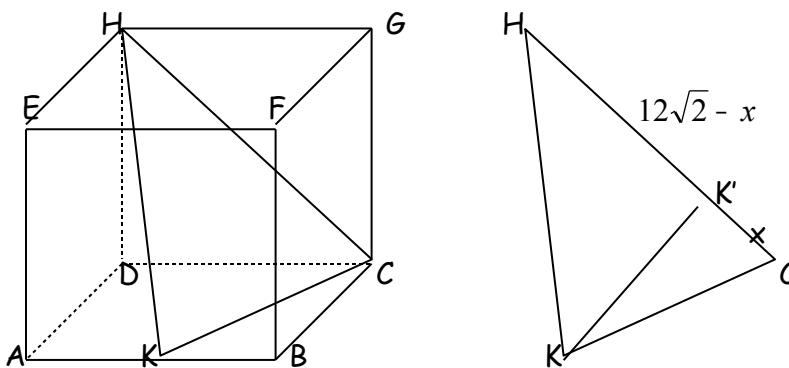


Proyeksi AH pada $BDHF$ adalah $A'H$

$$A'H = \sqrt{8^2 + (4\sqrt{2})^2} = 4\sqrt{6}$$

18. Diketahui kubus $ABCD.EFGH$ dengan rusuk 12 cm. K adalah titik tengah rusuk AB . Tentukan jarak antara titik K ke garis HC !

Jawab :



$$KC = \sqrt{12^2 + 6^2} = \sqrt{180}$$

$$KH = \sqrt{12^2 + \sqrt{180}^2} = \sqrt{324}$$

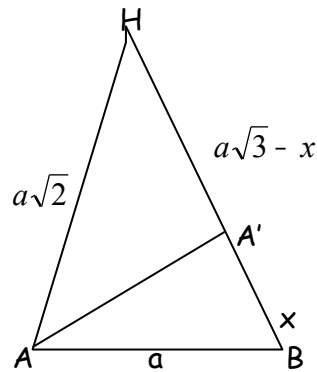
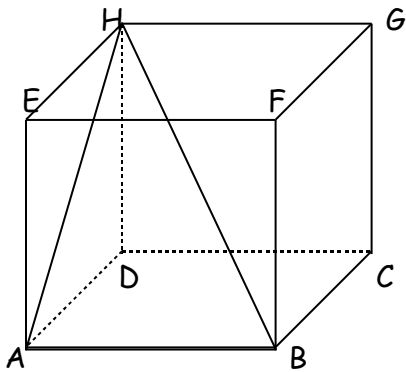
$$(KK')^2 = (KK')^2$$

$$\sqrt{180}^2 - x^2 = \sqrt{324}^2 - (12\sqrt{2} - x)^2 \Rightarrow x = 3\sqrt{2}$$

$$KK' = \sqrt{180 - (3\sqrt{2})^2} = 9\sqrt{2}$$

19. Diketahui kubus $ABCD.EFGH$ dengan rusuk a . Tentukan jarak titik A ke diagonal BH !

Jawab :



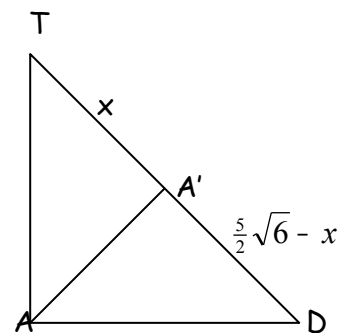
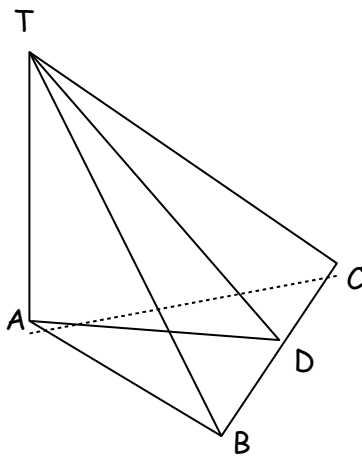
$$(AA')^2 = (AA')^2$$

$$a^2 - x^2 = (a\sqrt{2})^2 - (a\sqrt{3} - x)^2 \Rightarrow x = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$AA' = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{a}{3}\sqrt{6}$$

20. Pada limas $T.ABC$ diketahui AT , AB dan AC saling tegak lurus. Panjang $AT = AB = AC = 5$ cm. Tentukan jarak titik A ke bidang TBC !

Jawab :



$$AD = \sqrt{5^2 - \left(\frac{5}{2}\sqrt{2}\right)^2} = \frac{5}{2}\sqrt{2}$$

$$TD = \sqrt{5^2 + \left(\frac{5}{2}\sqrt{2}\right)^2} = \frac{5}{2}\sqrt{6}$$

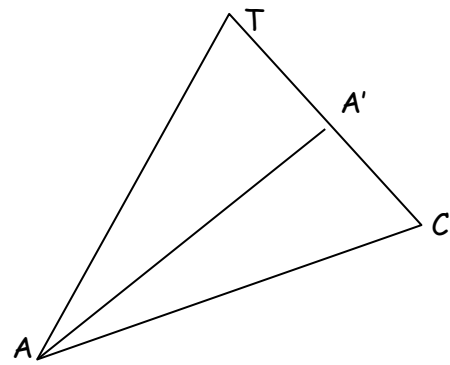
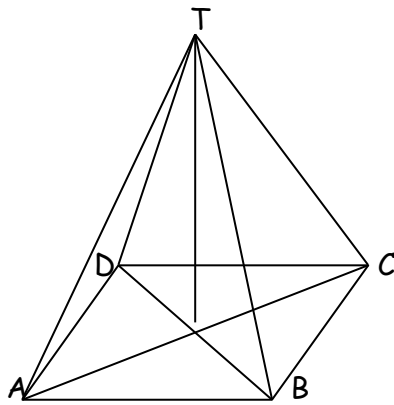
$$(AA')^2 = (AA')^2$$

$$5^2 - x^2 = \left(\frac{5}{2}\sqrt{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\sqrt{6} - x\right)^2 \Rightarrow x = \frac{5}{3}\sqrt{6}$$

$$AA' = \sqrt{25 - \left(\frac{5}{3}\sqrt{6}\right)^2} = \frac{5}{3}\sqrt{3}$$

21. Diketahui limas beraturan $T.ABCD$. Panjang rusuk alas 12 cm dan panjang rusuk tegaknya $12\sqrt{2}$ cm. Tentukan jarak A ke TC !

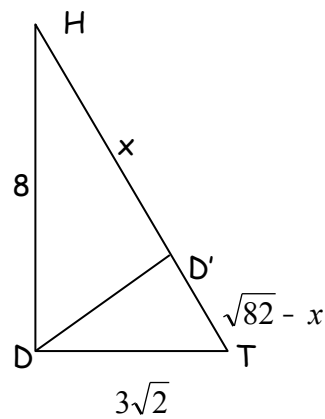
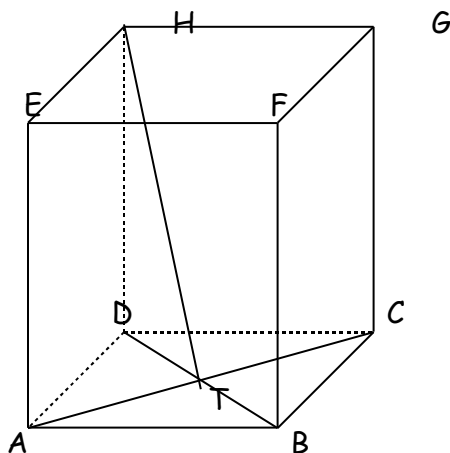
Jawab :



$$AA' = \sqrt{(12\sqrt{2})^2 - (6\sqrt{2})^2} = 6\sqrt{6}$$

22. Prisma segi-4 beraturan $ABCD.EFGH$ dengan rusuk 6 cm dan tinggi prisma 8 cm. Titik potong diagonal AC dan BD adalah T . Tentukan jarak titik D ke TH !

Jawab :



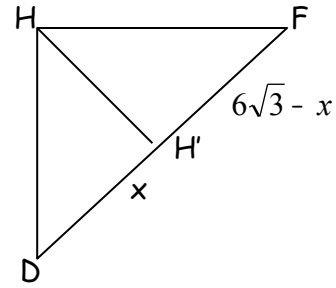
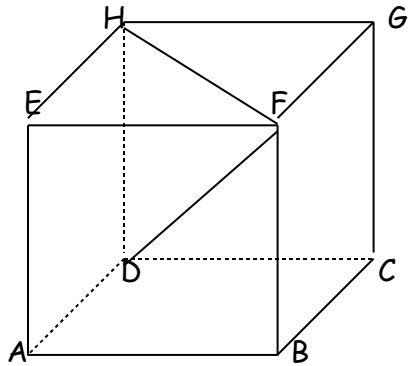
$$HT = \sqrt{64 + 18} = \sqrt{82}$$

$$8^2 - x^2 = (3\sqrt{2})^2 - (\sqrt{82} - x)^2 \Rightarrow x = \frac{32}{41}\sqrt{82}$$

$$DD' = \sqrt{8^2 - \left(\frac{32}{41}\sqrt{82}\right)^2} = \frac{24}{41}\sqrt{41}$$

23. Pada kubus $ABCD.EFGH$, tentukan jarak titik H ke DF !

Jawab :

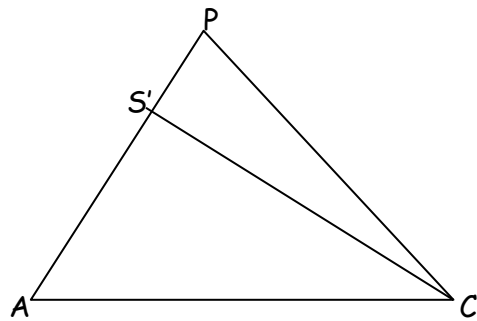
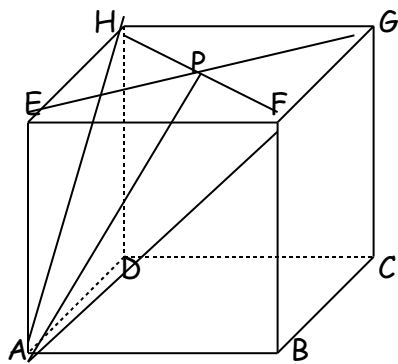


$$36 - x^2 = 72 - (6\sqrt{3} - x)^2 \Rightarrow x = 2\sqrt{3}$$

$$HH' = \sqrt{36 - (2\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{6}$$

24. Diketahui kubus $ABCD.EFGH$ dengan rusuk a cm. Jika S merupakan proyeksi titik C pada bidang AFH , maka tentukan jarak titik A ke titik S !

Jawab :

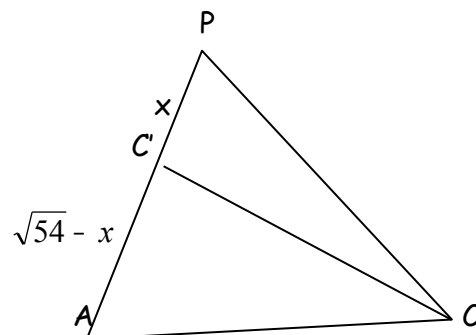
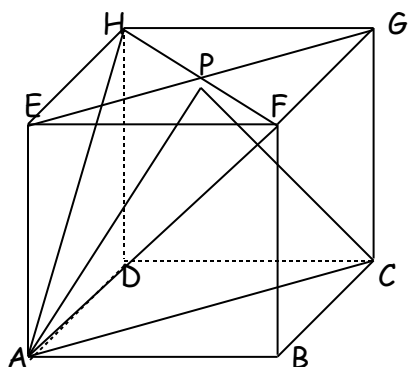


$$AP = CP = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = a\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$(a\sqrt{2})^2 - (AS)^2 = \left(a\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 - \left(a\sqrt{\frac{3}{2}} - AS\right)^2 \Rightarrow AS = \frac{1}{3}a\sqrt{6}$$

25. Pada kubus $ABCD.EFGH$, tentukan jarak titik C ke bidang AFH !

Jawab :



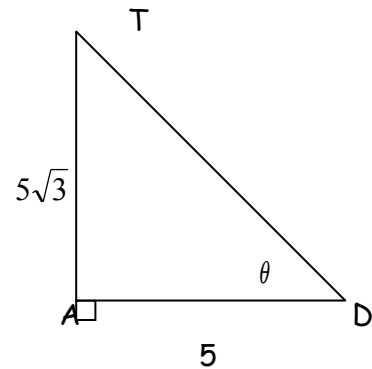
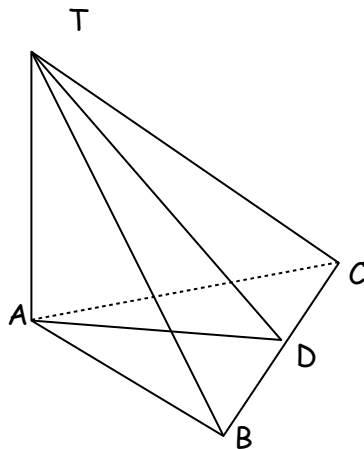
$$AP = CP = \sqrt{6^2 + (3\sqrt{2})^2} = \sqrt{54}$$

$$\sqrt{54}^2 - x^2 = (6\sqrt{2})^2 - (\sqrt{54} - x)^2 \Rightarrow x = \sqrt{6}$$

$$CC' = \sqrt{54 - 6} = 4\sqrt{3}$$

26. Bidang empat (tetrahedron) $T.ABC$ mempunyai alas segitiga siku-siku ABC , dengan sisi $AB = AC$, $TA = 5\sqrt{3}$ dan tegak lurus pada alas. Jika $BC = 10$, maka tentukan sudut antara TBC dan bidang alas!

Jawab :



$$AB^2 + AC^2 = 10^2$$

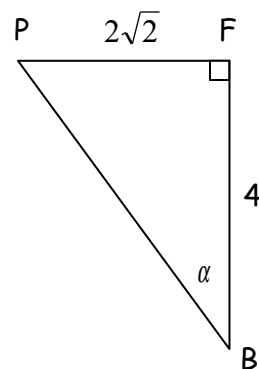
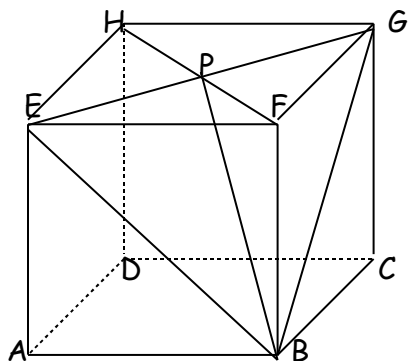
$$\text{Karena } AB = AC \text{ maka } 2AB^2 = 100 \Leftrightarrow AB = \sqrt{50}$$

$$AD = \sqrt{50 - 25} = 5$$

$$\tan \theta = \frac{5\sqrt{3}}{5} = \sqrt{3} \Rightarrow \theta = 60^\circ$$

27. Diketahui kubus $ABCD.EFGH$ dengan rusuk 4 cm. Jika sudut antara BF dan bidang BEG adalah α maka tentukan $\sin \alpha$!

Jawab :

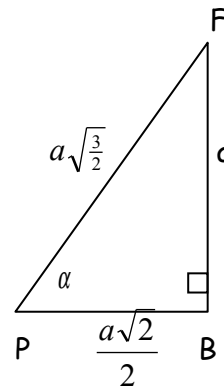
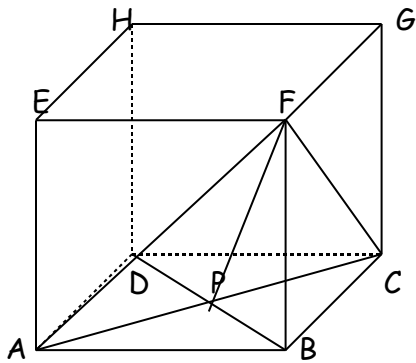


$$BP = \sqrt{16 + 8} = 2\sqrt{6}$$

$$\sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{6}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

28. Pada kubus $ABCD.EFGH$, α adalah sudut antara bidang ACF dan $ABCD$. Tentukan nilai $\sin \alpha$!

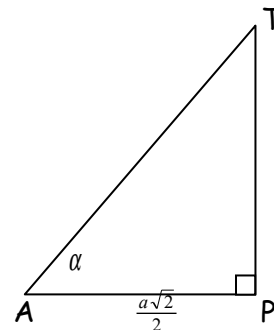
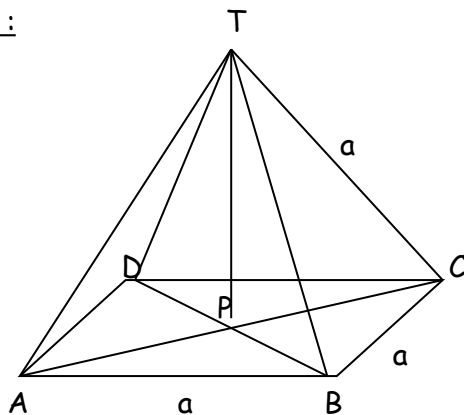
Jawab :



$$\sin \alpha = \frac{a}{a\sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{3}\sqrt{6}$$

29. Pada limas segiempat beraturan $T.ABCD$ yang semua rusuknya sama panjang, tentukan besar sudut antara TA dan bidang $ABCD$!

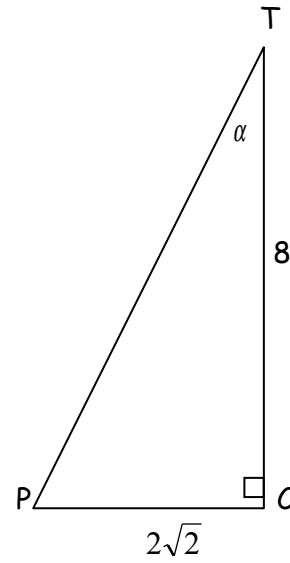
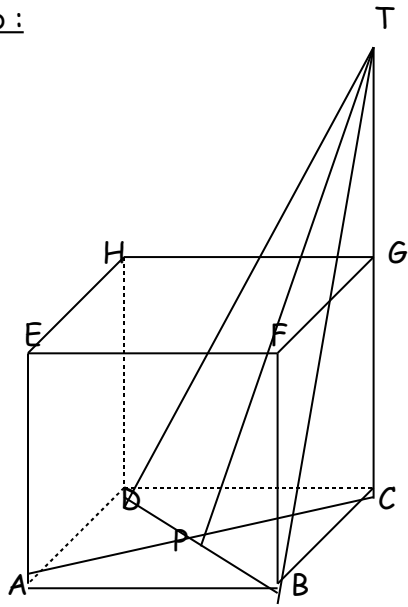
Jawab :



$$\cos \alpha = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \Rightarrow \alpha = 45^\circ$$

30. Diketahui kubus $ABCD.EFGH$ dengan rusuk 4. Titik T pada perpanjangan CG , sehingga $CG = GT$. Jika sudut antara TC dan bidang BDT adalah α maka tentukan $\tan \alpha$!

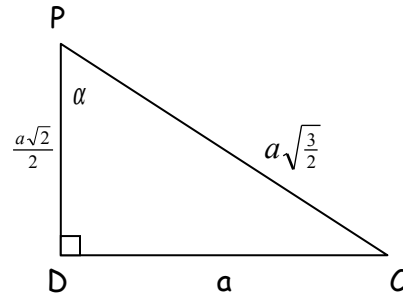
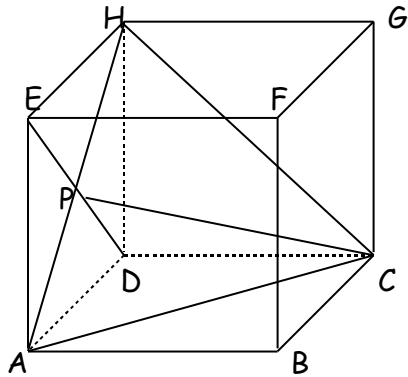
Jawab :



$$\tan \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{8} = \frac{1}{4}\sqrt{2}$$

31. Pada kubus $ABCD.EFGH$, α adalah sudut antara bidang $ADHE$ dan ACH . Tentukan nilai $\cos \alpha$!

Jawab :

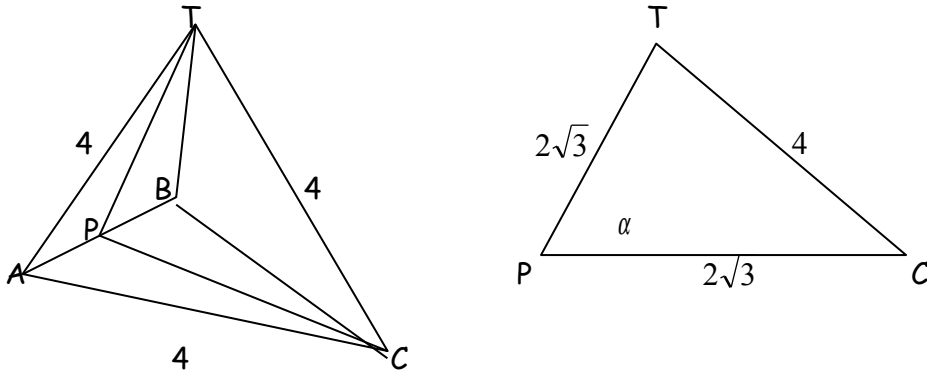


$$CP = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + a^2} = a\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\cos \alpha = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

32. Diketahui bidang empat beraturan $T.ABC$ dengan rusuk 4 cm. Titik P pada pertengahan AB . Sudut antara TP dengan bidang alas adalah α . Tentukan nilai $\tan \alpha$!

Jawab :

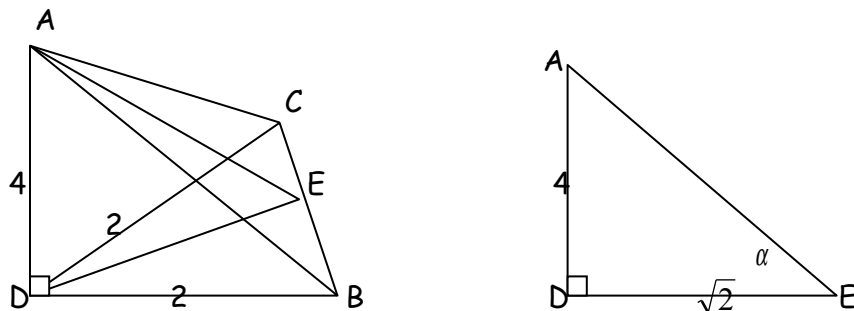


$$CP = TP = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$$

$$\cos \alpha = \frac{(2\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{3})^2 - 4^2}{2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{\sqrt{8}}{1} = 2\sqrt{2}$$

33. Bidang empat $A.BCD$ dengan AD siku-siku dengan alas dan segitiga BCD siku-siku di D . Sudut antara bidang BCD dan BCA adalah α . Tentukan nilai $\tan \alpha$!

Jawab :



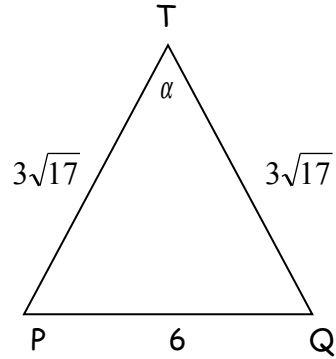
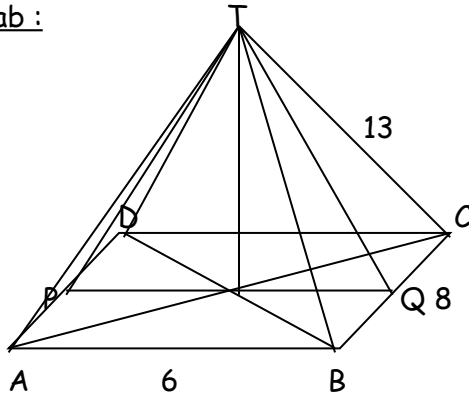
$$BC = 2\sqrt{2}$$

$$DE = \sqrt{4 - 2} = \sqrt{2}$$

$$\tan \alpha = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

34. Pada limas tegak $T.ABCD$ alasnya berbentuk persegi panjang. Sudut antara bidang TAD dan TBC adalah α . Tentukan nilai $\tan \alpha$!

Jawab :

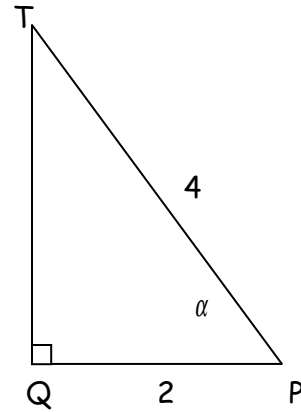
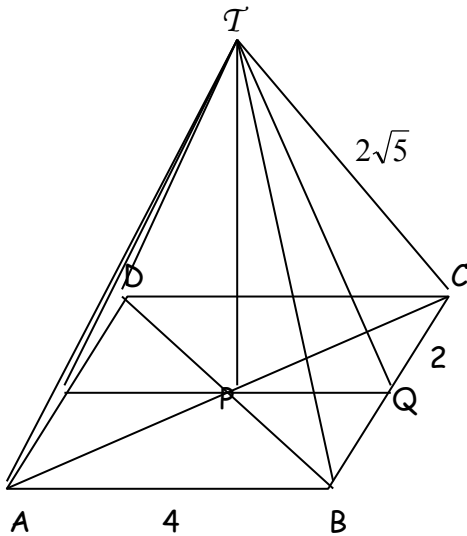


$$TP = TQ = \sqrt{13^2 - 4^2} = 3\sqrt{17}$$

$$\cos \alpha = \frac{(3\sqrt{17})^2 + (3\sqrt{17})^2 - 6^2}{2 \cdot 3\sqrt{17} \cdot 3\sqrt{17}} = \frac{15}{17} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{8}{15}$$

35. Pada limas beraturan $T.ABCD$ dengan rusuk tegak $2\sqrt{5}$ cm dan rusuk alas 4 cm, tentukan tangen sudut antara bidang TBC dengan bidang $ABCD$!

Jawab :



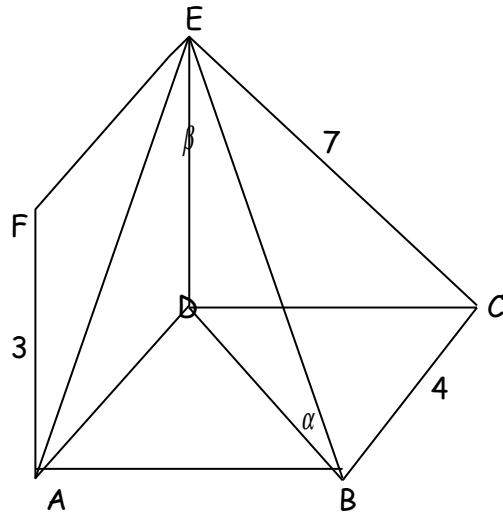
$$TP = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 - 2^2} = 4$$

$$TQ = \sqrt{16 - 4} = 2\sqrt{3}$$

$$\tan \alpha = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

36. $ABCD$ adalah empat persegi panjang pada bidang horizontal dan $ADEF$ empat persegi panjang pula pada bidang vertikal. Panjang $AF = 3$ m, $BC = 4$ m dan $CE = 7$ m. Jika α dan β berturut-turut sudut antara BE dengan bidang $ABCD$ dan bidang $ADEF$, maka tentukan $\tan \alpha \cdot \tan \beta$!

Jawab :



$$CD = AB = \sqrt{7^2 - 3^2} = 2\sqrt{10}$$

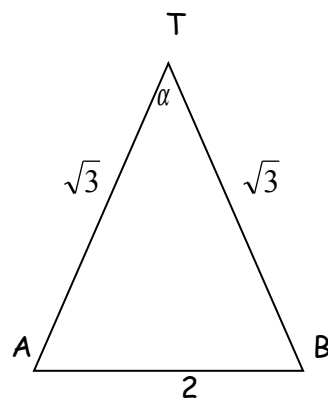
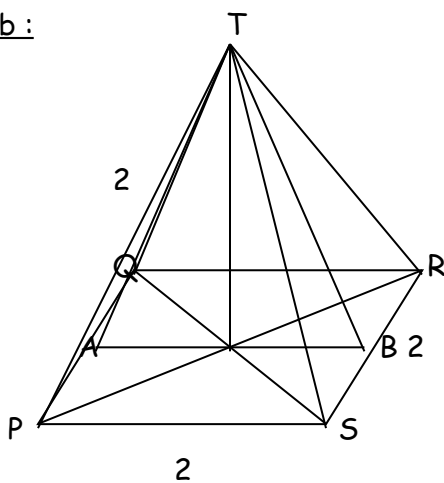
$$BD = \sqrt{16 + 40} = 2\sqrt{14}$$

$$AE = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$\tan \alpha \cdot \tan \beta = \frac{3}{2\sqrt{14}} \cdot \frac{2\sqrt{10}}{5} = \frac{3}{\sqrt{35}}$$

37. Dari limas beraturan $T.PQRS$ diketahui $TP=TQ=TR=TS=2$ dan $PQ=QR=RS=SP=2$. Jika α adalah sudut antara bidang TPQ dan TRS , maka tentukan nilai $\cos \alpha$!

Jawab :

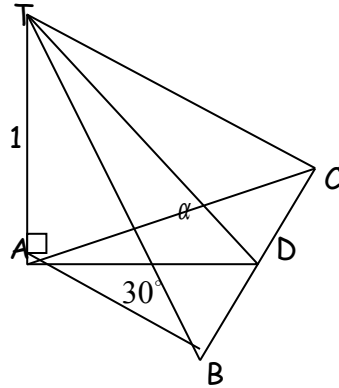


$$TA = TB = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$$

$$\cos \alpha = \frac{(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2 - 2^2}{2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{3}$$

38. Pada bidang empat $T.ABC$, bidang alas ABC merupakan segitiga sama sisi, TA tegak lurus pada bidang alas, panjang TA sama dengan 1 dan besar sudut TBA adalah 30° . Jika α adalah sudut antara bidang TBC dan bidang alas, maka tentukan nilai $\tan \alpha$!

Jawab :



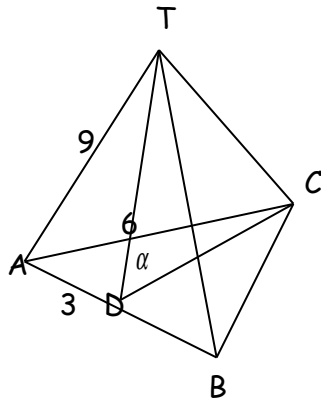
$$AB = AC = BC = \frac{1}{\tan 30^\circ} = \sqrt{3}$$

$$AD = \sqrt{(\sqrt{3})^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{3}{2}$$

$$\tan \alpha = \frac{TA}{AD} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

39. Limas beraturan $T.ABC$ dengan panjang rusuk alas 6 cm dan panjang rusuk tegak 9 cm. Tentukan nilai sinus sudut antara bidang TAB dan bidang ABC !

Jawab :



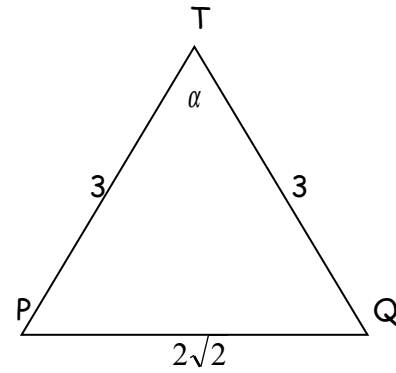
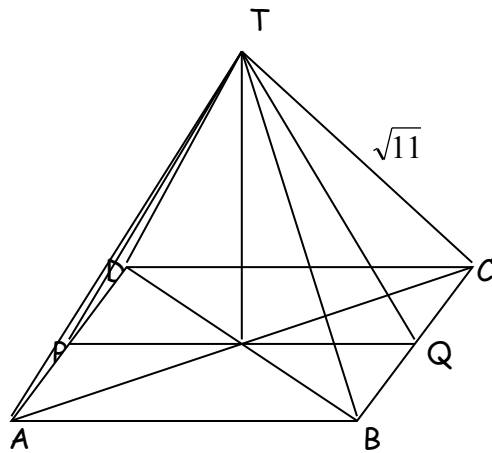
$$TD = \sqrt{9^2 - 3^2} = \sqrt{72}$$

$$CD = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{27}$$

$$\cos \alpha = \frac{72 + 27 - 81}{2 \cdot \sqrt{72} \cdot \sqrt{27}} = \frac{\sqrt{6}}{12} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{138}}{12}$$

40. Diketahui limas segiempat beraturan $T.ABCD$. Panjang rusuk tegak $\sqrt{11}$ cm dan panjang rusuk alas $2\sqrt{2}$ cm. Sudut antara bidang TAD dan TBC adalah α , maka tentukan nilai $\cos\alpha$!

Jawab :



$$TP = TQ = \sqrt{(\sqrt{11})^2 - (\sqrt{2})^2} = 3$$

$$\cos\alpha = \frac{9 + 9 - 8}{2 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{5}{9}$$